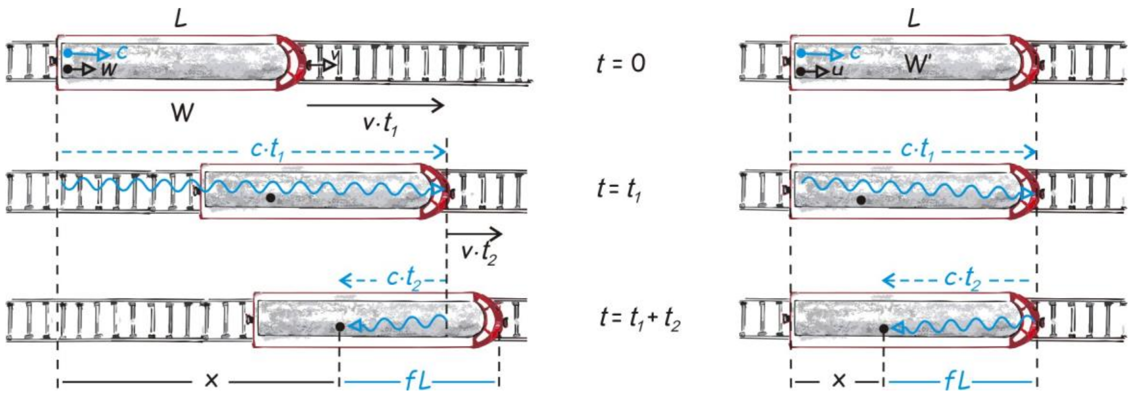
Bewijzen en toegiften

1 *Het bewijs van Mermin voor het optellen van snelheden*

W op een perron ziet W′ in een treinwagon passeren met snelheid v. W′ schiet een kogel af met snelheid u en stuurt tegelijkertijd een lichtflits die aan de voorkant weerkaatst en de kogel even later treft. W en W′ zijn het alleen eens over de plaats in de trein waar kogel en lichtstraal elkaar treffen. De afstand tussen de voorkant en die trefplaats is een fractie, f, van de lengte L. Over de waarde van f zijn ze het eens. Over alle afstanden en tijden zijn ze het vanwege tijdrek en lengtekrimp oneens, maar omdat die aan het eind allemaal zullen wegvallen geven we daar geen verschillende namen aan. Het gaat om f.
W ziet een kogel met onbekende snelheid w en een ruimteschip met bekende snelheid v. Hij wil weten hoe groot w is.



Volgens W geldt voor de trefplaats:
via de kogel: $x = w\cdot(t_1 + t_2)$
en via het licht: $x = c\cdot(t_1 - t_2)$
Combineren leidt tot:

$$(c + w)\cdot t_2 = (c - w)\cdot t_1 \Rightarrow \frac{t_2}{t_1} = \frac{c-w}{c+w}$$

Voor het licht geldt volgens hem ook:
$L + v\cdot t_1 = c\cdot t_1 \Rightarrow L = (c - v)\cdot t_1$ en
$f\cdot L - v\cdot t_2 = c\cdot t_2 \Rightarrow f\cdot L = (c + v)\cdot t_2$
Delen leidt tot:

$$f = \frac{c+v}{c-v}\cdot\frac{t_2}{t_1} = \frac{c+v}{c-v}\cdot\frac{c-w}{c+w}$$

Volgens W′ geldt voor de trefplaats:
via de kogel: $x = u\cdot(t_1 + t_2)$
en via het licht: $x = c\cdot(t_1 - t_2)$
Combineren leidt tot:

$$(c + u)\cdot t_2 = (c - u)\cdot t_1 \Rightarrow \frac{t_2}{t_1} = \frac{c-u}{c+u}$$

Voor het licht geldt volgens hem ook:
$L = c\cdot t_1$ en
$f\cdot L = c\cdot t_2$
Delen leidt tot:

$$f = \frac{t_2}{t_1} = \frac{c-u}{c+u}$$

Stel de twee formules voor f aan elkaar gelijk $\Rightarrow$

$$\frac{c+v}{c-v}\cdot\frac{c-w}{c+w} = \frac{c-u}{c+u} \Rightarrow (c+v)(c-w)(c+u) = (c-v)(c+w)(c-u)$$

Werk alle haken weg $\Rightarrow$

$$w(c^2 + uv) = c^2(u + v) \Rightarrow w = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}$$

2 $E = mc^2$

Het bewijs in het katern is gebaseerd op de 'Doos van Einstein', dat is een bewijs dat Einstein zelf publiceerde in *Annalen der Physik*, 20 (1906): 626-633: *Das Prinzip von der Erhaltung der Schwerpunktsbewegung und die Trägheit der Energie*. Later werd duidelijk dat het bewijs aangepast moet worden, want als het foton zich afzet tegen de doos komt de andere kant van de doos niet meteen in beweging. Er gaat een schokgolf door de wanden van de doos naar de andere kant en die gaat véél langzamer dan het foton.

In het boek van French is dit bewijs te vinden:
Twee massa's m_1 en m_2 bevinden zich in rust op een afstand L van elkaar. Het zwaartepunt van deze twee massa's bevindt zich bij Z, volgens

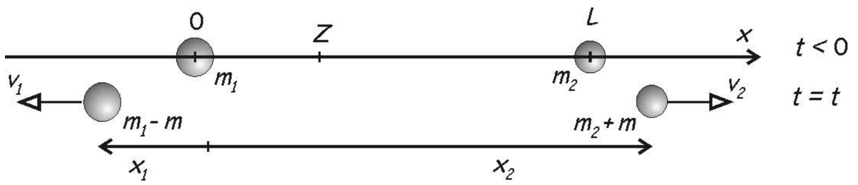
$M{\cdot}z = m_1{\cdot}0 + m_2{\cdot}L$. met $M = m_1 + m_2$

Op $t = 0$ zendt m_1 een foton uit met energie E en impuls E/c. Het lijkt daarbij alsof m_1 een hoeveelheid massa m verliest; de overgebleven massa $(m_1 - m)$ krijgt de impuls $-E/c$ $\Rightarrow$

$$v_1 = -\frac{E}{c\cdot(m_1 - m)}$$

Na een tijd L/c arriveert het foton bij m_2. Dat neemt als het ware die massa m op en de nieuwe massa $(m_2 + m)$ krijgt de impuls E/c $\Rightarrow$

$$v_2 = \frac{E}{c\cdot(m_2 + m)}$$



Op een later tijdstip t is dit de situatie:

$$x_1 = -\frac{E}{c\cdot(m_1 - m)}\cdot t \qquad M{\cdot}z = (m_1 - m){\cdot}x_1 + (m_2 + m){\cdot}x_2 \qquad x_2 = \frac{E}{c\cdot(m_2 + m)}\cdot(t - \tfrac{L}{c}) + L$$

Hieruit volgt:

$$M\cdot z = -\frac{E\cdot t}{c} + \frac{E}{c}\cdot(t - \tfrac{L}{c}) + (m_2 + m)\cdot L = -\frac{E\cdot L}{c^2} + m_2\cdot L + m\cdot L$$

Het zwaartepunt van het hele systeem kan niet van zijn plaats zijn gekomen, want er hebben geen uitwendige krachten gewerkt. Daaruit volgt:

$$M\cdot z = m_2\cdot L = -\frac{E\cdot L}{c^2} + m_2\cdot L + m\cdot L \;\Rightarrow\; \frac{E}{c^2} = m \;\Rightarrow\; E = m\cdot c^2$$

De energie E van het foton vertegenwoordigt dus een hoeveelheid massa m die berekend kan worden met $m = E/c^2$.

Het kan nog simpeler:
Een atoom staat stil in de oorsprong en zendt op $t = 0$ een foton uit met energie E en impuls E/c. Het atoom met massa M (ná het uitzenden van het foton) krijgt daardoor de impuls $-E/c$ en dus de snelheid $v_1 = -E/(M{\cdot}c)$. Het foton vertegenwoordigt een massa m. Het zwaartepunt van beide bevindt zich onmiddellijk na $t = 0$ in de oorsprong.

Na de tijd $t = L/c$ heeft het atoom de afstand x_1 afgelegd en het foton de afstand L.

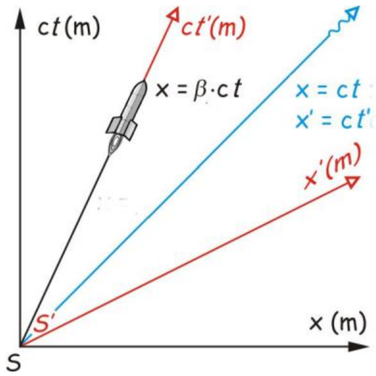
$$x_1 = -\frac{E}{M\cdot c}\cdot\frac{L}{c} \quad \text{en} \quad x_2 = L$$

Het zwaartepunt moet zich nog steeds in de oorsprong bevinden: $M{\cdot}x_1 + m{\cdot}L = 0$

$$M\cdot x_1 = -\frac{E\cdot L}{c^2} \quad\Rightarrow\quad -\frac{E\cdot L}{c^2} + m\cdot L = 0 \quad\Rightarrow\quad E = mc^2$$

3 De ct′-as en de ct(x)-grafiek van de raket

We kunnen de stelsels S voor W en S′ voor W′ combineren door de lijnen voor een lichtstraal op elkaar te leggen. We moeten dan wel de richting van de ct'-as gelijk maken aan die van de $ct(x)$-grafiek van de raket.



De ct-as is de lijn met $x = 0$. Dit is de 'wereldlijn' van de man die de raket op $t = 0$ ziet passeren.

Op dezelfde manier is de ct'-as is de lijn met $x' = 0$. Dit is de 'wereldlijn' van de raket.

Combineer je dat laatste met de lorentz-transformatie, dan krijg je vanzelf de vergelijking van de raket in stelsel S:

$x' = 0$ en $x' = \gamma\cdot(x - \beta\cdot ct) \Rightarrow x - \beta\cdot ct = 0 \Rightarrow x = \beta\cdot ct$

Beide rode assen maken dezelfde hoek φ met de zwarte assen; $\tan\varphi = \beta$.

---

4 De afleiding van Einstein voor de lorentz-transformatie

De manier waarop Einstein de lorentz-transformatie afleidt gaat zo.
In beide stelsels geldt voor het licht:

in positieve richting: $x - ct = 0$ en $x' - ct' = 0$

in negatieve richting: $x + ct = 0$ en $x' + ct' = 0$

$0 = 0$ dus ook $0 = \lambda\cdot 0$ en $0 = \mu\cdot 0$ Pas dat toe op de regels hierboven:

$x' - ct' = \lambda\cdot(x - ct) \Rightarrow x' - ct' = \lambda\cdot x - \lambda\cdot ct$

$x' + ct' = \mu\cdot(x + ct) \Rightarrow x' + ct' = \mu\cdot x + \mu\cdot ct)$

Via optellen en aftrekken van de regels en met $(\lambda + \mu)/2 = a$ en $(\lambda - \mu)/2 = b$ krijg je:

$x' = a\cdot x - b\cdot ct$ en $ct' = a\cdot ct - b\cdot x \Rightarrow x' = p\cdot(x - q\cdot ct)$ en $ct' = p\cdot(ct - q\cdot x)$

Dit lijkt al op de formule die in het katern genoemd wordt.
Nu moet alleen nog bewezen worden dat $p = \gamma$ en $q = \beta$.

Vul $x' = 0$ in $\Rightarrow$ $0 = p\cdot(x - q\cdot ct) \Rightarrow x - q\cdot ct = 0$ ofwel: $x = q\cdot ct$

$x' = 0$ is de oorsprong van stelsel S′. Dit punt beweegt in stelsel S volgens: $x = \beta\cdot ct$
Maar dat betekent dat $q = \beta$.

We hebben nu gevonden:

$x' = p\cdot(x - \beta\cdot ct)$ en $ct' = p\cdot(ct - \beta\cdot x)$ (1)

Om p te pakken te krijgen maak je gebruik van de eis dat voor de inverse transformatie geldt:

$x = p\cdot(x' + \beta\cdot ct')$ en $ct = p\cdot(ct' + \beta\cdot x')$ (2)

Deze eis volgt direct uit het eerste postulaat: voor verschillende inertiaalstelsels moeten dezelfde soort formules gelden; β wordt vervangen door $-\beta$ omdat stelsel S voor de reizigers in S′ naar links beweegt.

Vul x' en ct' van (1) in bij de formule van x bij (2):

$x = p\cdot\{p\cdot(x - \beta\cdot ct)\} + \beta\cdot\{p\cdot(ct - \beta\cdot x)\} \Rightarrow x = p^2\cdot x - p\cdot\beta\cdot ct + \beta\cdot p\cdot ct - p^2\cdot\beta^2\cdot x \Rightarrow$

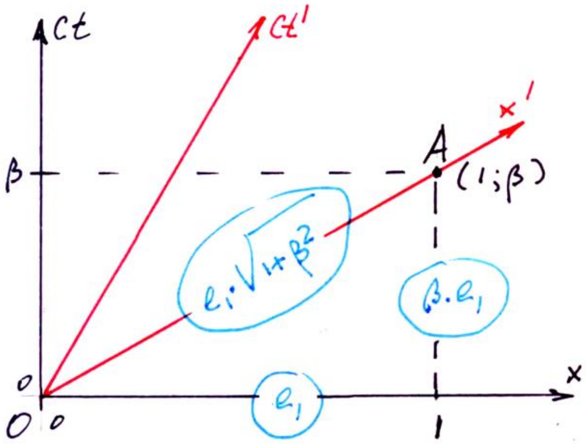
$x = x\cdot(p^2 - p^2\cdot\beta^2) + 0 \Rightarrow p^2\cdot(1 - \beta^2) = 1 \Rightarrow p = \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

5 *De eenheden op de assen*

Als je bij wikipedia Minkowski intikt, vind je daar dat de lengtes van de eenheden op de assen als volgt in elkaar kunnen worden omgerekend:

$$e_2 = e_1 \cdot \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}$$

Het bewijs gaat met behulp van de lorentz-transformatie erg makkelijk.



De afstand [0→1] op de x-as heeft de lengte e_1; de verticale afstand [1→A] heeft daarom de lengte $\beta \cdot e_1$.
De blauw omcirkelde waarden zijn dus lengtes die je in cm kunt meten waarop je Pythagoras mag toepassen.

Pas de lorentz-transformatie toe om de rode coördinaten van A te berekenen:

$x' = \gamma \cdot (1 - \beta \cdot \beta) = \gamma \cdot (1 - \beta^2) = 1/\gamma = \sqrt{1-\beta^2}$

$ct' = \gamma \cdot (\beta - \beta \cdot 1) = 0$

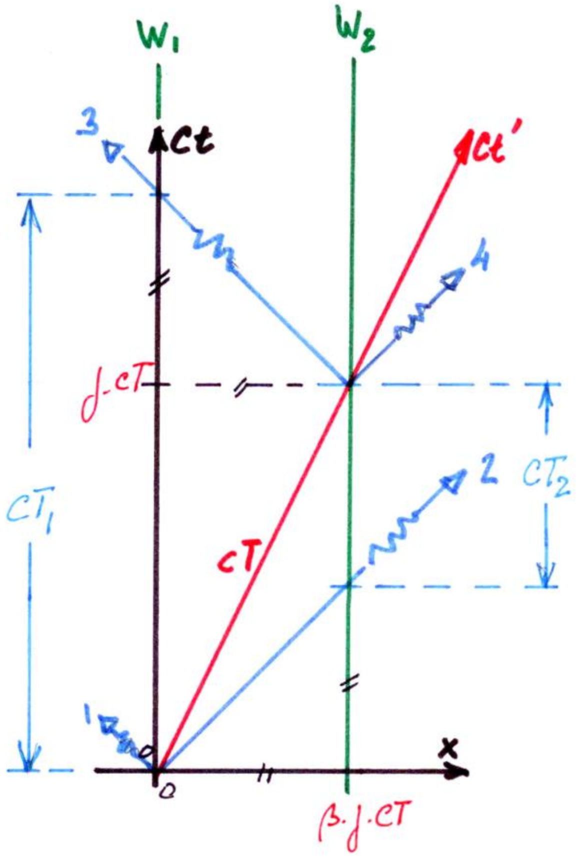
Voor de lengte [0→A] op de x'-as kunnen we dus schrijven:

$$OA = e_1 \cdot \sqrt{1+\beta^2} = e_2 \cdot \sqrt{1-\beta^2}$$

Hiermee is het bewijs voor de formule geleverd.

6 *Het dopplereffect bij licht*

Een astronaut zendt radio(licht!)signalen uit met een periode T.
Op $t' = 0$ de signalen 1 en 2 en op $t' = T$ de signalen 3 en 4.
Op $t' = 0$ bevindt hij zich bij waarnemer W_1 en op $t' = T$ bij waarnemer W_2.
W_1 ontvangt (met periode T_1) signalen vanuit een bron die zich verwijdert en W_2 ontvangt (met periode T_2) signalen vanuit een bron die nadert.
In grafiek zit dat er zo uit:



Bij de berekeningen hierna heb je nodig:

$$1 \pm \beta = \sqrt{(1 \pm \beta)^2} \quad \text{en} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta)\cdot(1+\beta)}}$$

Uit de figuur volgt voor W_1:

$$cT_1 = \gamma cT + \beta\gamma cT \;\Rightarrow\; T_1 = \gamma\cdot(1+\beta)\cdot T \;\Rightarrow$$

$$T_1 = \frac{\sqrt{(1+\beta)^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot T = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\cdot T \quad\Rightarrow\quad T_1 > T \;\text{ en }\; f_1 < f$$

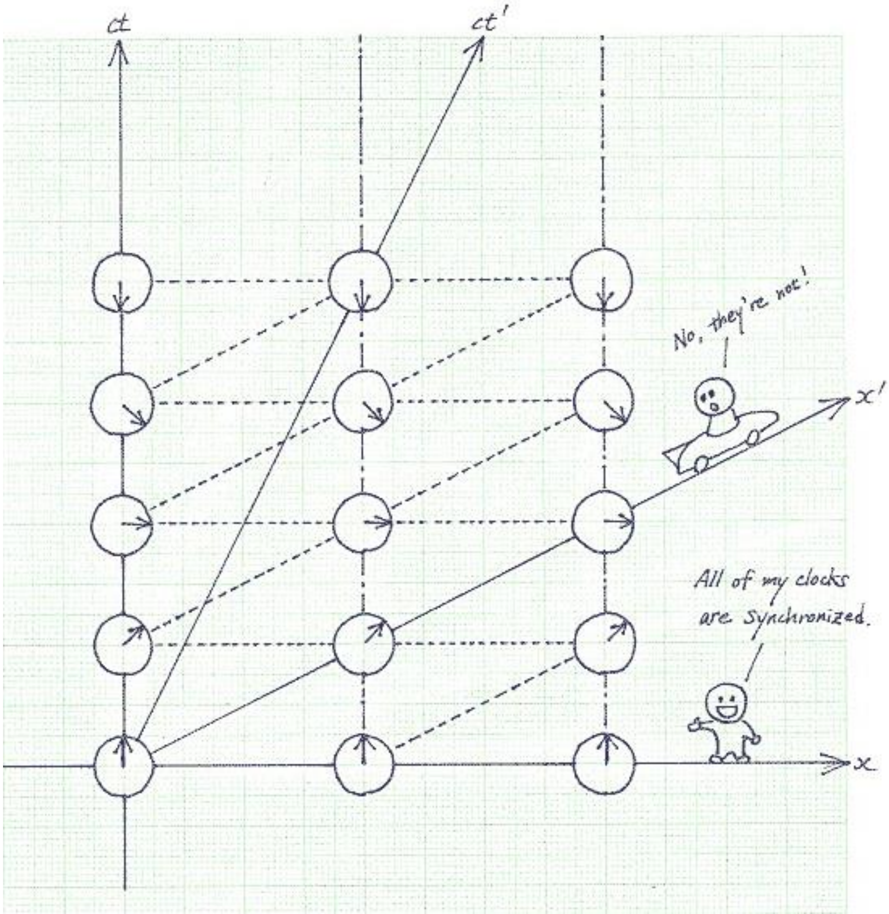
en voor W_2:

$$cT_2 = \gamma cT - \beta\gamma cT \;\Rightarrow\; T_2 = \gamma\cdot(1-\beta)\cdot T \;\Rightarrow$$

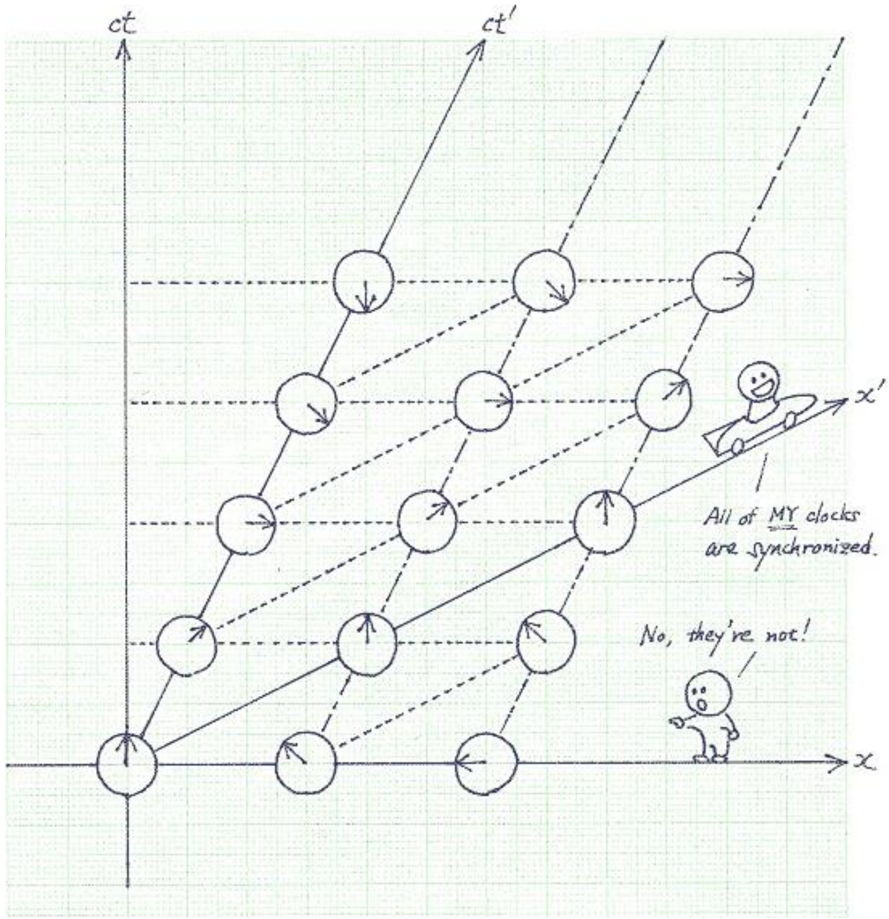
$$T_2 = \frac{\sqrt{(1-\beta)^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot T = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\cdot T \quad\Rightarrow\quad T_2 < T \;\text{ en }\; f_2 > f$$

7 *Boeiende plaatjes*

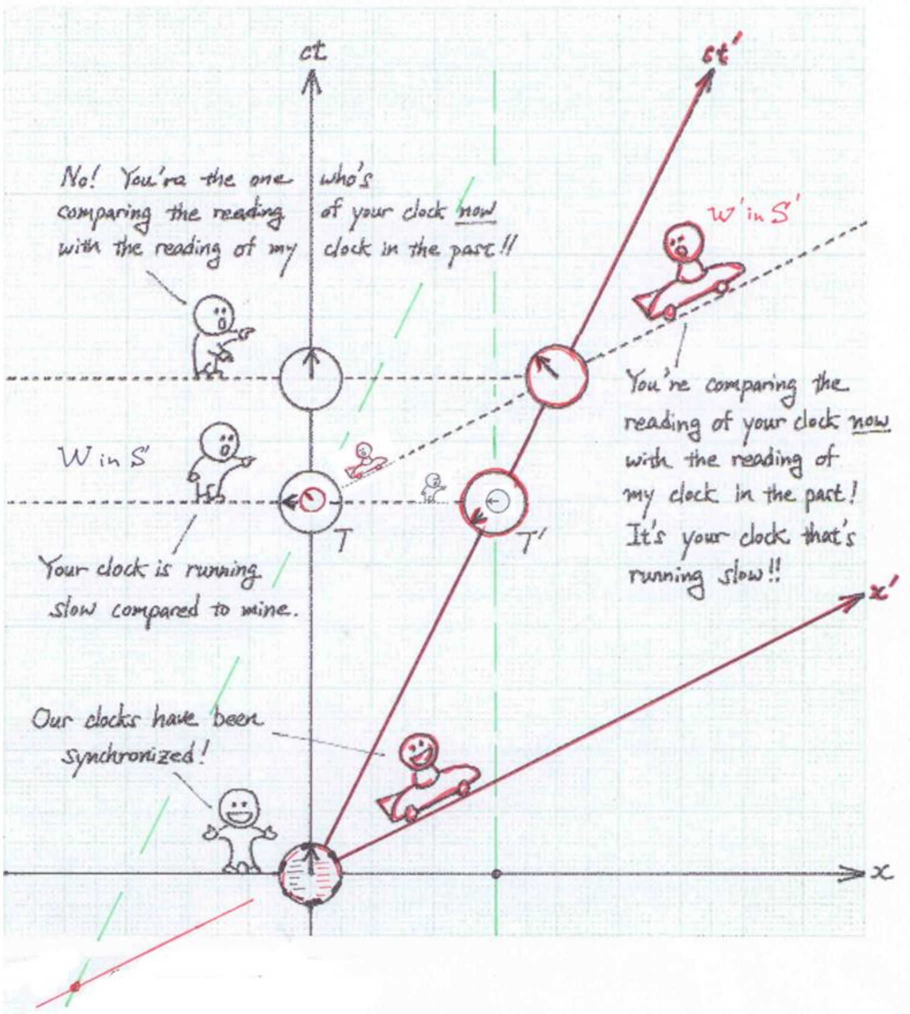
Deze plaatjes vond Ruud op internet.
http://www.phys.vt.edu/~takeuchi/relativity/notes/index.html



Dit zijn klokken in stelsel S; ze lopen allemaal gelijk.
De verticale lijnen evenwijdig aan de *ct*-as zijn de wereldlijnen van de klokken die in stelsel S gelijk lopen.
De *x*-as betekent: *ct* = 0.



Dit zijn klokken in stelsel S′; ook die lopen allemaal gelijk.
De scheve lijnen evenwijdig aan de *ct*′-as zijn de wereldlijnen van de klokken die in stelsel S′ gelijk lopen.
De *x*′-as betekent: *ct*′ = 0.



Tijdrek

Leuk plaatje, maar wel dubieus, want er worden twee soorten klokken door elkaar gehaald: de zwarte van S en de rode van S′. Daarom heb ik het plaatje aangepast.

Het tweede zwarte mannetje links kan niet op de rode klok naast hem kijken. Het kleine zwarte mannetje naast het kleine zwarte klokje kan dat wel. Maar die kijkt naar een rode klok op een vroeger tijdstip.

Het rode mannetje in de grote auto bovenaan kan niet op de zwarte klok links onder hem kijken. Het kleine rode mannetje in het kleine autootje naast het kleine rode klokje kan dat wel. Dat kleine mannetje zit achterin de auto. Hij kijkt naar een zwarte klok op een vroeger tijdstip.