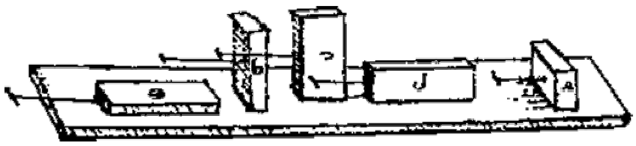
OuNa 2 De cowboyknoop

NVOX, **37**, nr. 6, juni 2012 Ruud Brouwer, Don Bosco College te Volendam, rbrouwer@donboscocollege.com

In westerns parkeert de sheriff zijn paard voor de saloon door de teugels een paar keer om de paal te wikkelen: de cowboyknoop. Is de weerstandskracht groot genoeg om het paard vast te binden? Uit deze simpele vraag is een interessant houtje-touwtje practicum ontstaan.

Da Vinci

Da Vinci (1452-1519) was zeer waarschijnlijk de allereerste die de statische wrijving tussen droge oppervlakken systematisch ging onderzoeken. In zijn tekening maakt hij duidelijk dat het contactoppervlak geen invloed heeft op de weerstandskracht.

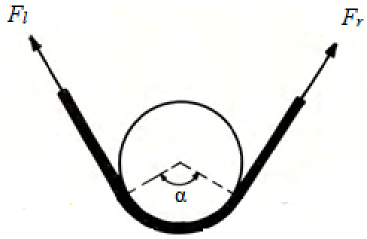


Hoe je het blok ook neerzet − op z'n lange, korte of brede kant − het blok zal steeds bij dezelfde trekkracht in beweging komen. Niet veel mensen voelen dit intuïtief aan. Bijna iedereen denkt ten onrechte dat de weerstandskracht evenredig is met het contactoppervlak. Stel de vraag maar eens aan een geïnteresseerde leek en zelden zal je het goede antwoord horen.
De tweede ontdekking van Da Vinci is dat de weerstands-kracht evenredig is met het gewicht.
Zijn derde ontdekking was dat verschillende materialen met verschillende inspanning over elkaar schuiven. Da Vinci vermoedde dat dit kwam door de ruwheid van het materiaal. Helaas publiceerde hij zijn bevindingen over wrijving niet. Ze zijn slechts terug te vinden in zijn aantekeningen. Daarom worden de wetten over de statische wrijving toegeschreven aan Amontons (1663−1705) die de wrijvingswetten van Da Vinci herontdekte en herformuleerde. Destijds werden de 'ontdekkingen' van Amontons met veel scepsis ontvangen en daarom verifieerde Coulomb ze nogmaals in 1781 en hij voegde er nog een wet (over dynamische wrijving) aan toe. Tegenwoordig noteren we de wrijvingswetten tussen droge oppervlakken als volgt:

1. De weerstandskracht is evenredig met de normaalkracht (1e wet van Amontons).
2. De weerstandskracht is onafhankelijk van het contactoppervlak (2e wet van Amontons).
3. De kinetische wrijving is onafhankelijk van de snelheid waarmee de oppervlakken langs elkaar bewegen (wet van Coulomb).

De cowboyknoop

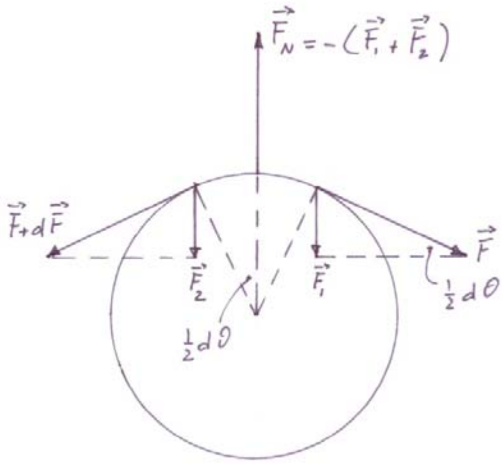
Zeer ervaren collega's kunnen zich misschien nog wel een VWO-examenopgave herinneren uit 1978 waarin in plaats van een paard een schip werd afgemeerd door een kabel om een paal te slaan.



In deze opgave werd uitgelegd dat de weerstandskracht exponentieel toeneemt met contacthoek α. Stel dat de spankracht links (F_L) groter is dan de spankracht rechts (F_R). De kabel zal niet slippen als voldaan wordt aan de '*kaapstandervergelijking*': $\frac{F_L}{F_R} < e^{\mu\alpha}$

In deze vergelijking is μ de statische wrijvingscoëfficiënt.

De afleiding van de kaapstanderformule



Uit de figuur volgt $F_1 = F\cdot\sin(½d\theta)$.
Voor kleine $d\theta$ en dus kleine dF is $\sin(½d\theta) \approx ½d\theta$ en geldt voor de normaalkracht F_N dus:

$F_N = F\cdot d\theta$

Verder geldt $dF = \mu\cdot F_N$ dus:

$$dF = \mu F\cdot d\theta \Rightarrow \frac{dF}{F} = \mu d\theta$$

Deze relatie integreren we, bij de linker integraal met F van F_R t/m F_L en bij de rechter met θ van 0 t/m α (in rad). We vinden dan:

$$\ln\frac{F_L}{F_R} = \mu\alpha \Rightarrow F_L = F_R\cdot e^{\mu\alpha}.$$

Practicum: Atwood mét wrijving

De kaapstandervergelijking is goed te testen met simpele materialen. Eigenlijk is de opstelling niks anders dan het *'Toestel van Atwood **mét** wrijving'*.[1]

Het touwtje is om een cilindervormige (statief)stang gehangen. Je hebt nu een halve wikkeling. Als k het aantal wikkelingen voorstelt, dan is $k = ½$.

De massa aan de rechterkant noemen we m_R. Neem bijvoorbeeld voor m_R een gewichtje van 10 gram en verander die waarde niet meer.

- Aan de linkerkant hangen we steeds meer massa. Als de massa links m_L groot genoeg is, dan wordt wrijving met de stang overwonnen en gaat het touw slippen. We noemen de verhouding $\frac{m_L}{m_R} = \delta_{\frac{1}{2}}$. Noteer de waarde van m_L en bereken de waarde van $\delta_{\frac{1}{2}}$.
- Vervolgens wordt het touw één keer extra (k = 1½) om de stang gewikkeld. Nu moet aan de linkerkant meer massa worden gehangen om het touw te laten slippen. De grotere massa m_L, waarbij het slippen op het punt staat te beginnen, geeft een nieuwe verhouding
$$\frac{m_L}{m_R} = \delta_{\frac{3}{2}}$$
Noteer de waarde van m_L en bereken de waarde van $\delta_{\frac{3}{2}}$.
- Doe dit vier keer. Steeds weer één wikkeling erbij. Meet m_L en bereken daarmee δ_k voor k = ½ t/m = 4½. De verhoudingen $\delta_{\frac{1}{2}}, \delta_{\frac{3}{2}}, \delta_{\frac{5}{2}}, \delta_{\frac{7}{2}}$ en $\delta_{\frac{9}{2}}$, hebben een simpel verband:
$$\delta_{\frac{1}{2}} = \left(\delta_{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\delta_{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\delta_{\frac{7}{2}}\right)^{\frac{1}{7}} = \left(\delta_{\frac{9}{2}}\right)^{\frac{1}{9}}.$$
- Laat zien dat het 'simpele' verband door de metingen wordt bevestigd. Het theoretisch bewijs staat aan het eind.

Als het touw 4½ keer om de statiefstang is gehangen, dan is ongeveer een kg nodig om 10 g in beweging te krijgen. Een paar slagen van de teugel om de paal moet dus wel genoeg zijn om het cowboypaard vast te zetten.

Tot slot: een enge proef

Neem een stuk touw van ongeveer een meter lengte. Hang aan het ene uiteinde een wijnglas en aan het andere uiteinde een wijnkurk. Laat het wijnglas aan het touw hangen over een stok en houdt de kurk vast.
Laat nu de kurk los …

Ondanks een rotsvast geloof in de kaapstander-vergelijking blijft dit een spannende demonstratie. Zal het glas echt niet kapot vallen?

Afleiding van het 'simpele' verband

Voor α geldt: $\alpha = 2\pi k$ met k = ½, 1½, 2½ … . Dus
$$\frac{m_L}{m_R} = \delta_k = e^{\mu 2\pi k}.$$

Vul k = ½ in $\Rightarrow$ $\delta_{\frac{1}{2}} = e^{\mu\pi}$

Als bijvoorbeeld $k = \frac{9}{2}$ dan $\delta_{\frac{9}{2}} = e^{\mu 9\pi}$ dus
$$\left(\delta_{\frac{9}{2}}\right)^{\frac{1}{9}} = e^{\mu\pi} = \delta_{\frac{1}{2}}.$$

1. Deze opstelling heb ik gevonden in *Why Toast Lands Jelly-Side Down, Zen and the Art of Physics Demonstrations* van Robert Ehrlich