OuNa 9 Kettingen – 1

Ruud Brouwer, Don Bosco College te Volendam, info@stevin.info

Demonstraties maken van natuurkunde een boeiend schoolvak. Een ingewikkeld apparaat aanzetten voor snel resultaat is saai. Ik zal dan ook geen excursie naar een ziekenhuis organiseren om daar het MRI-apparaat (nieuw in het NiNa programma) te gaan bekijken. Natuurkunde moet je doen en daar zijn houtje-touwtje proeven zeer geschikt voor. De kosten zijn gering, de uitkomsten van de proef vaak verrassend en de verklaring subtiel. In deze OuNa een paar voorbeelden hoe een ketting interessante lesmomenten kan opleveren.

Ring en ketting

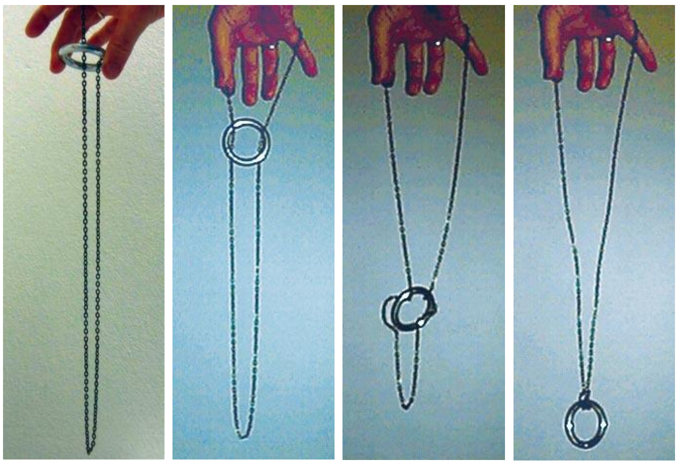
Op Woudschoten 2011 was in de Stevin-werkgroep de proef met een ring en een ketting een groot succes. Verslavend zelfs. De opdracht lijkt zo simpel.

Wat moet je doen?

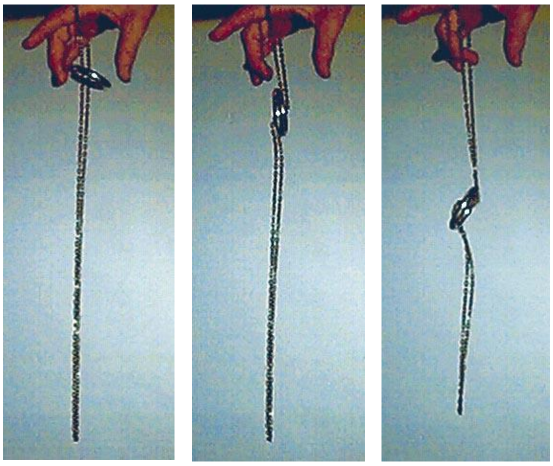
Houd ketting en ring vast zoals op deze foto is te zien. Laat de ring los en probeer voor mekaar te krijgen dat de ring niet op de grond valt, maar aan de ketting blijft hangen. Het is geen truc, maar pure natuurkunde.

Gebruik geen ring die te licht is, want dan werkt de proef niet. Het beste kun je in de bouwmarkt voor de schappen de juiste ring en ketting bij elkaar zoeken en alles uitproberen. Trek je niets aan van andere klanten die je waarschijnlijk schaapachtig staan aan te kijken omdat je steeds een ring op de grond laat kletteren. Blijf oefenen, want uiteindelijk lukt deze mooie proef echt.

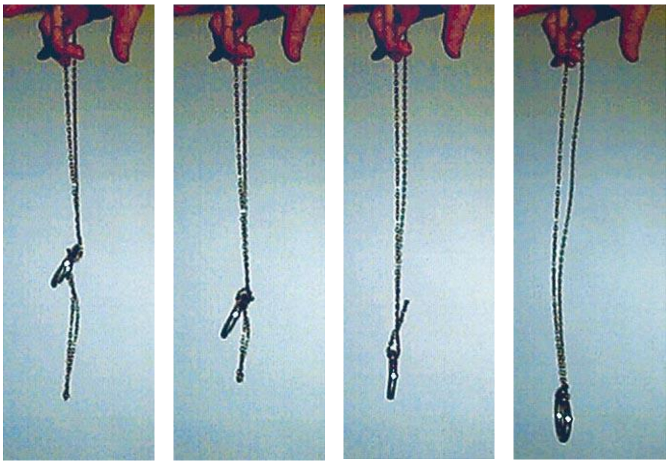
Het loslaten van de ring moet voorzichtig gebeuren. Zet de ring niet af en probeer geen rotatie van de ring af te dwingen. Laat de ring uit zichzelf roteren door heel voorzichtig je duim van de ring af te halen. Je middel-vinger is dan het draaipunt.



Mijn verklaring van deze proef is dat de ring na het loslaten vanwege zijn traagheid meer dan een kwartslag draait en daardoor tegen de ketting duwt. De derde wet van Newton zegt: $F_{actie} = -F_{reactie}$, dus de ketting duwt terug. In dit zijaanzicht is dat mooi te zien.



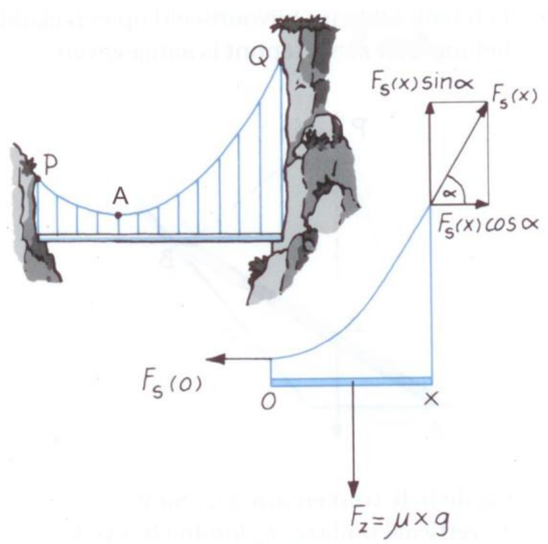
Door het terugduwen zal de ketting langs de ring omhoog kunnen glijden als de weerstandskracht met de ring niet te hoog is. Zo ontstaat een lus waar de ring even later aan blijft hangen.



Klik hier om de slow motion films in voor- en zijaanzicht te bekijken die ik van de ring en de ketting maakte.

Een hangbrug

In *Scoop vwo N1 deel 2* wordt in **Extra** op p. 25 afgeleid dat de ophanging van een hangbrug een parabool vormt. Dat gaat zo:



A is het laagste punt van de (massaloze) ophangkabel. Er is evenwicht, dus:

$F_s(x) \cdot \sin\alpha = \mu x g$

$F_s(x) \cdot \cos\alpha = F_s(0) = c$

Delen levert: $\tan\alpha = f'(x) = \mu x g/c = k \cdot x$

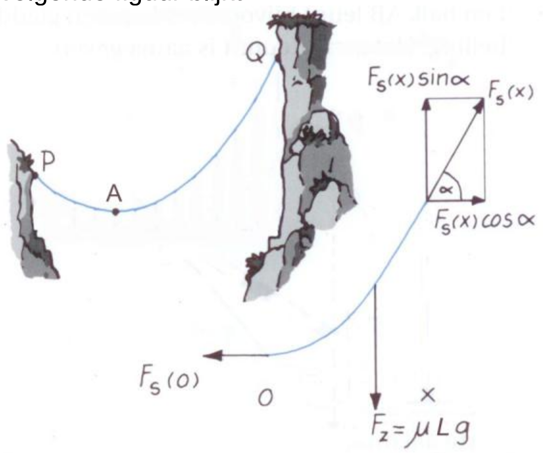
De oplossing van deze differentiaalvergelijking is:

$f(x) = ½ \cdot k \cdot x^2$ (+ *integratieconstante*)

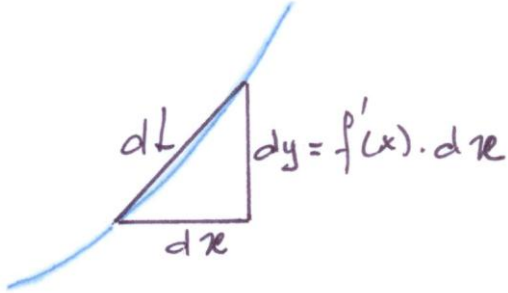
De integratieconstante mogen we nul stellen.
Als de hoek α bij het eindpunt Q klein is, wordt de horizontale kracht $F_s(0)$ groot; zie opgave 34 van *Stevin vwo deel 1* op p. 107 over de waslijn die je niet te strak mag spannen.

Een hangende ketting

De afleiding voor de formule van een hangende ketting (met dank aan Hubert Biezeveld) gaat om te beginnen net zo, maar er treedt een complicatie op, zoals uit de volgende figuur blijkt.



Nu moet de verticale component van de spankracht in Q het gewicht van de ketting tillen. De lengte van dat stuk ketting is L en $f'(x) = \mu L g/c$.



Voor dL en L geldt:

$$\mathrm{d}L = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + f'^2\mathrm{d}x^2} = \mathrm{d}x\sqrt{1+f'^2} \Rightarrow$$

$$L = \int_0^x \sqrt{1+f'^2}\,\mathrm{d}x$$

Al met al vinden we:

$$f'(x) = \frac{\mu g}{c} \cdot \int_0^x \sqrt{1+f'^2}\,\mathrm{d}x = k \cdot \int_0^x \sqrt{1+f'^2}\,\mathrm{d}x$$

Deze differentiaalvergelijking is oplosbaar, maar niet door leerlingen − en ook menig docent zal er moeite mee hebben. In de literatuur is echter te vinden dat de zogenaamde cosinus hyperbolicus de oplossing is:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Voor de *kettinglijn* geldt:

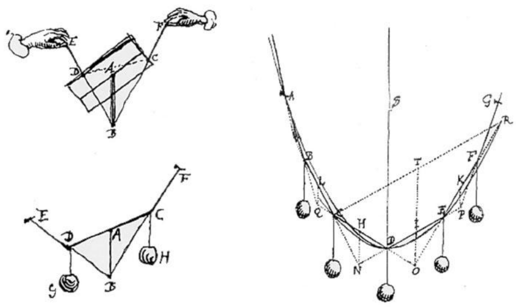
$$f(x) = a \cdot \cosh(\tfrac{x}{a}) = \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

Leerlingen kunnen dit zelf controleren door de differentiaalvergelijking één keer te differentiëren:

$$f''(x) = k \cdot (1+f'^2)$$

Ze vinden dan: $a = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ met $k = \dfrac{\mu g}{F_s(0)}$

Je kunt leerlingen ook vragen om aan de hand van een fotometing bij videometen en functiefit in coach 6 aan te tonen dat de kettinglijn – in tegenstelling tot wat Galilei dacht – géén parabool is. Dat werd door de zeventien-jarige Huygens al langs meetkundige weg bewezen.



De kettinglijn ondersteboven

Gaudi gebruikte de kettinglijn bij de pilaren van de Sagrada Familia. In het museum naast de kerk is te zien hoe hij zijn boogconstructies ondersteboven ontwierp. In een hangend touwtje bestaan alleen trekkrachten in de richting van het touw. Keer je die kromme om, dan blijft de richting van de drukkracht binnen de boog. Oude kettingboogconstructies uit de 3e eeuw (Ctesiphon, Irak) staan nog steeds overeind.