OuNa 11 | De meiboom

Ruud Brouwer, Don Bosco College te Volendam,

In Oost en West Europa en de Verenigde Staten wordt het feest rond de meiboom al eeuwen gevierd. Historici denken dat het een vruchtbaarheidsrite is om bij het begin van de zomer de natuur te huldigen. Men gelooft dat het planten van de boom leidt tot vruchtbaarheid voor vee, akkers en mensen.
De kinderen op de foto weven linten om de paal. Na het omwikkelen, moet het lint weer afgewikkeld worden. Aan dat afwikkelen is in de klas goed te meten en daar gaat deze OuNa over.

Bezemsteel

Bevestig een touw aan een verticale bezemsteel of een andere, redelijk dikke stok. Rol het touw netjes om de steel zonder dat de wikkelingen elkaar overlappen. Iets dikker touw zou daarbij kunnen helpen. Hang een gewichtje aan het einde van het touw en laat het los. Het afwikkelen gaat beginnen.

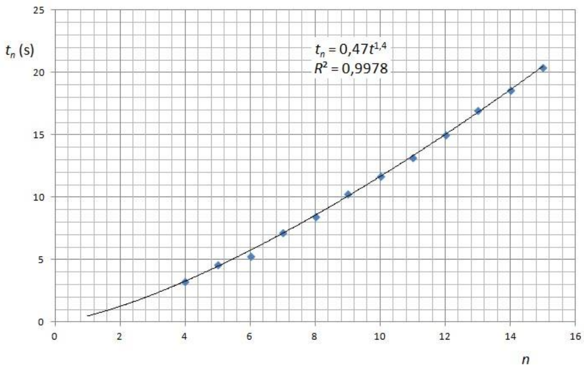


Tijdens het afwikkelen zal het gewichtje een steeds grotere cirkelbaan beschrijven. Noem t_n de tijd voor n rondjes. Volgens R. Ehrlich van Princeton University geldt: $t_n \sim n^{1,5}$ (*Why Toast Lands Jelly-Side Down*, p. 78). De afleiding staat aan het eind.

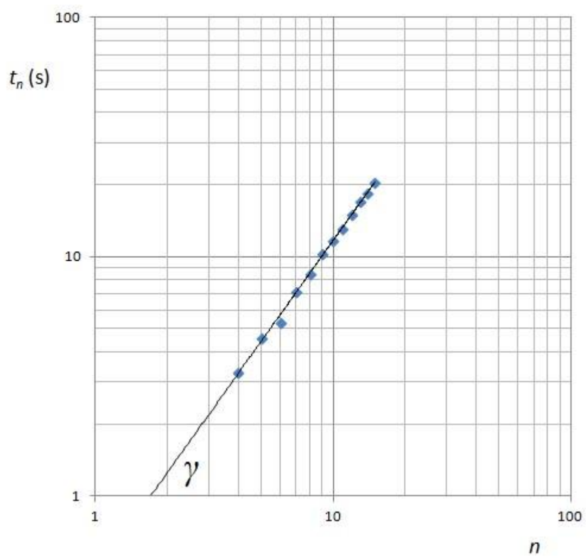
Met andere woorden: als je t_n tegen $n^{1,5}$ uitzet in een diagram dan zou de lijn door de meetpunten een rechte lijn door de oorsprong moeten zijn.
Wil je de proef alleen demonstreren en de evenredigheid snel aannemelijk te maken, meet dan t_n voor n windingen en t_{2n} voor het dubbele aantal windingen. Dan is $t_{2n}/t_n = (2n)^{1,5}/n^{1,5} = 2^{1,5} = 2,8$. Voor zes en twaalf rondjes bij een normale bezemsteel vond ik respectievelijk 5,3 s en 15 s. De proef komt dus mooi uit: 15/5,3 = 2,8.

Grafieken

Leerlingen wil je natuurlijk grafieken laten maken. In het nieuwe natuurkundeprogramma zijn ICT-vaardigheden belangrijker geworden en kun je de leerlingen de opdracht geven met Excel een $t_n(n)$-grafiek te maken. Kies als trendlijn *macht* en vink de optie ‘vergelijking in grafiek weergeven’ aan; je ziet dan meteen of de door Excel berekende exponent van de trendlijn in de buurt van de 1,5 is uitgekomen.



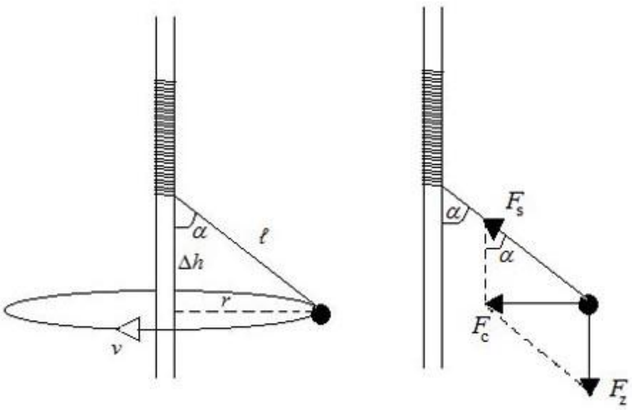
Op het vwo is werken met de logaritme gelukkig weer teruggekeerd bij de vaardigheden, dus kun je de $t_n(n)$-grafiek ook op dubbellog-papier laten maken. Voor de richtingshoek γ die bij deze rechte lijn hoort, geldt: $\tan(\gamma) = 1,5 \Rightarrow \gamma = 56°$. En ook dat klopt keurig, meet maar na.



Constante hoek?

Als je de proef doet, valt op dat de hoek α die het touw met de paal maakt tijdens het afwikkelen niet verandert. Is deze hoek te voorspellen?
Vanaf het loslaten is na een aantal rondjes het gewichtje over een afstand $\Delta h \approx \ell \cdot \cos\alpha$ gedaald (links). Volgens de wet van behoud van energie geldt dan:

$mg \cdot \Delta h = \frac{1}{2} mv^2 \;\Rightarrow\; v^2 \approx 2g\ell \cdot \cos\alpha$.



Het gewichtje is een kegelslinger (rechts). De middelpuntzoekende kracht F_c wordt geleverd door de spankracht F_s en de zwaartekracht F_z:

$\tan\alpha = F_c/F_z = (mv^2/r)/(mg) = v^2/gr$.

Voor de straal r kan geschreven worden: $r = \ell \cdot \sin\alpha \;\Rightarrow$

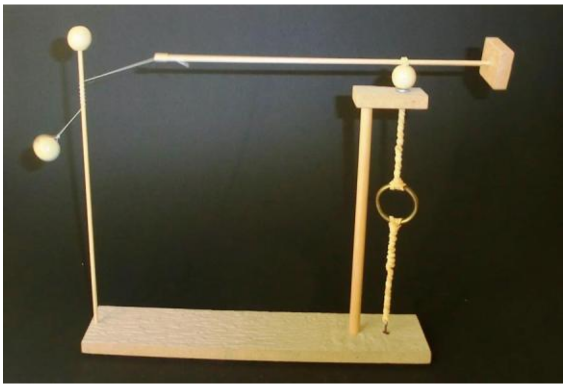
$v^2 \approx g \cdot \ell \cdot \sin\alpha \cdot \tan\alpha$.

Stel tenslotte de formules voor v^2 aan elkaar gelijk $\Rightarrow$

$2\cos\alpha = \sin\alpha \cdot \tan\alpha \Rightarrow \tan^2\alpha = 2 \;\Rightarrow\; \alpha = 55°$.

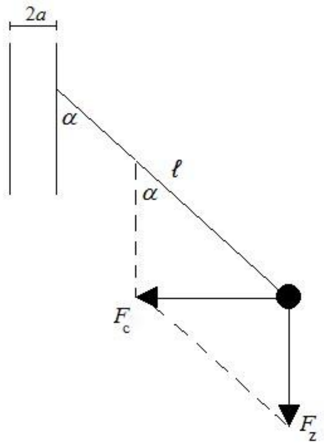
Paaldans

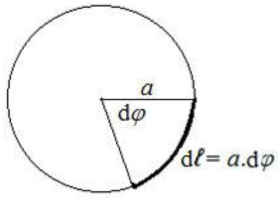
Wie enthousiast is geworden, kan bijvoorbeeld voor een profielwerkstuk de opstelling van de foto laten nabouwen. Het elastiek is gespannen. Als de kogel zich van de paal afwikkelt en loskomt, zal de horizontale stok 360° rondzwieren totdat het touw waar de kogel aan hangt zich om de paal slaat, opwindt, afwikkelt, enz.



De afleiding van $t_n \sim n^{1,5}$

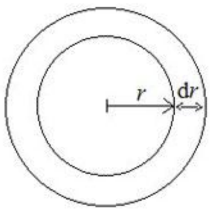
De dikte van de bezemsteel is $2a$.





$F_c = mg \cdot \tan\alpha = m\omega^2 r \;\Rightarrow\; \tan\alpha = \omega^2 r/g$

Het touw wikkelt van de paal af en daardoor neemt ℓ toe met $d\ell = a \cdot d\varphi$. De straal $r = \ell \cdot \sin\alpha$ van de cirkelbaan van de kogel neemt dus toe met $dr = d\ell \cdot \sin\alpha$.



De kogel heeft een radiale snelheid v_r.

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{d\ell \sin\alpha}{dt} = \frac{a d\varphi \sin\alpha}{dt} = a\sin\alpha \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

Uit $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ volgt: $\frac{dr}{dt} = a\sin\alpha \cdot \omega \;\Rightarrow\; \omega = \frac{\frac{dr}{dt}}{a \cdot \sin\alpha}$

Vul dit in bij $\tan\alpha = \omega^2 r/g$ en zet dt voorop:

$$dt = k.\sqrt{r} \cdot dr \quad \text{met} \quad k = \sqrt{\frac{1}{g \cdot a^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot \tan\alpha}}$$

k is dus een constante. Integreren levert:

$$t = \int_0^t dt = k \cdot \int_a^r \sqrt{r}\, dr = k \cdot \tfrac{2}{3}\left(r^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right) \;\Rightarrow\; t \sim r^{1,5}$$

Na n rondjes van de paal afwikkelen is ℓ toegenomen tot $\ell = 2\pi a \cdot n \;\Rightarrow\; \ell \sim n$. Uit $r = \ell \cdot \sin\alpha$ volgt:

$r \sim \ell \sim n \;\Rightarrow\; t \sim n^{1,5}$.