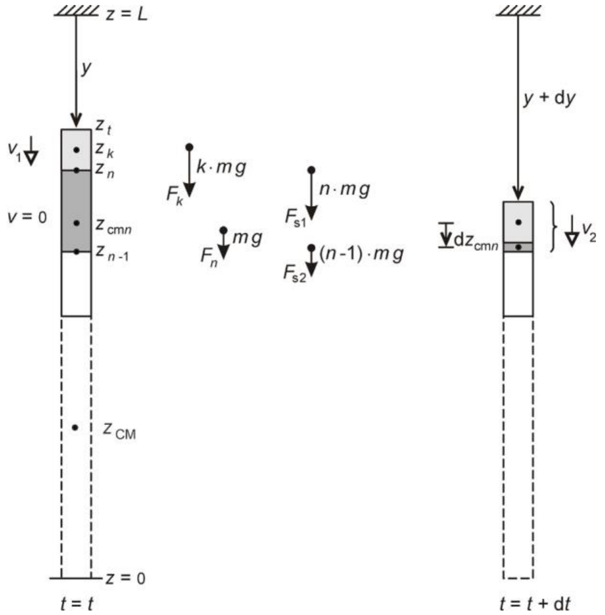
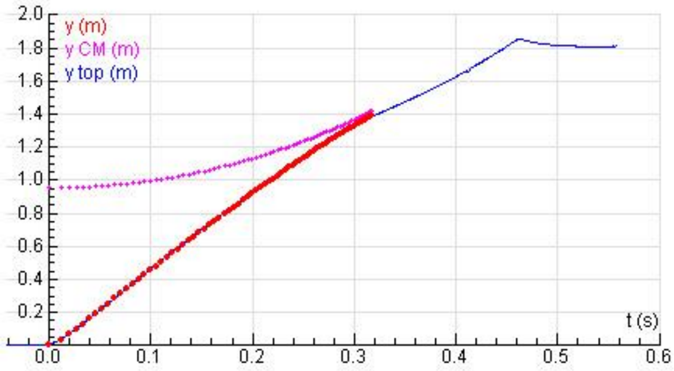
Een model van de vallende slinky





Bij mijn slinky horen deze waarden:
N = 84
L = 1,45 m
L_0 = 0,06 m
M = 0,2252 kg

Uitleg bij de figuur

z_t de top van de vallende slinky op het tijdstip t, gemeten vanaf de onderkant.
y de top van de vallende slinky op het tijdstip t, gemeten vanaf de bovenkant.
z_k het zwaartepunt van het blok met k samengepakte windingen. De dikte is $(N-n)\dfrac{L_0}{N}$.
z_n de top van winding n die op het punt staat te gaan vallen. Rechts is deze winding op t + dt in elkaar geklapt. $n = N - k$.
z_{cmn} het zwaartepunt van winding n.
z_{n-1} de top van winding $n-1$.
z_{CM} het zwaartepunt van de vallende slinky.
F_k de zwaartekracht op blok k.
F_n de zwaartekracht op winding n.
F_{s1} de spankracht in de veer aan de bovenkant van winding n. Deze kracht wordt tijdens het in elkaar klappen van winding n kleiner totdat hij aan het eind de waarde F_{s2} heeft.
F_{s2} de spankracht aan de onderkant van winding n. Deze kracht is gelijk aan de zwaartekracht van alle windingen eronder. Dat is de reden dat die windingen in de tijd dt niet in beweging komen.
F_s de gemiddelde waarde van F_{s1} in de tijd dt. (Deze kracht is uiteraard niet getekend.)

Het model

In één rekenlus klapt de uitgerekte winding n samen en dalen de zwaartepunten z_k en $z_{cm,n}$. De top daalt over de afstand dy in de tijd dt.

Er spelen drie krachten een rol die tijdens een rekenlus arbeid verrichten:

$F_k = k \cdot m \cdot g$	$W_k = F_k \cdot dy$	W_z op het vallende blok
$F_n = m \cdot g$	$W_n = F_n \cdot dz_{cmn}$	W_z op winding n
$F_s = ½(2n - 1) \cdot mg$	$W_s = F_s \cdot dy$	W van de spankracht in winding n

Het blok met k samengeklapte windingen botst niet-elastisch met winding n. Uit impulsbehoud volgt dan: $v_1 := v_1 \cdot k/(k+1)$.
Aan het eind van de lus geldt voor de nieuwe kinetische energie:

$½ \cdot (k+1) \cdot m \cdot v_2^2 = ½ \cdot (k+1) \cdot m \cdot v_1^2 + \Sigma W$.

Hiermee berekenen we v_2. Voor de gemiddelde snelheid in de tijd dt geldt:

$v_m = (v_1 + v_2)/2$.

De tijd dt bereken we met dt = dy/v_m.

NB: Het model werkt dus niet met een vast dt zoals ‘normale’ modellen!!

Het zwaartepunt van de vallende slinky

Voor de **hangende slinky** met N windingen **in rust** geldt volgens French and Hosken:

$$z_n = \frac{L_0}{N} n + \frac{L - L_0}{N^2} n^2 = na + n^2 b \quad (a \text{ is de dikte van één winding}) \quad \text{en} \quad z_{\text{CM},N} = \frac{2L + L_0}{6}$$

Bij de vallende slinky is het blok met k (= $N - n$) samengepakte windingen aan het vallen en hangt het deel met n windingen nog in rust. Om het zwaartepunt van het geheel te vinden, passen we de regel toe voor het zwaartepunt van twee massa's m_1 and m_2:

$(m_1 + m_2)\cdot z_{\text{CM}} = m_1\cdot z_1 + m_2\cdot z_2$ hierin is z_{CM} is het gezochte zwaartepunt $z_1 = z_{\text{k}}$ $z_2 = z_{\text{CM},n}$.

$m_1 + m_2 = N\cdot m$ $m_1 = (N - n)\cdot m$ $m_2 = n\cdot m$ m is de massa van één winding.

Het zwaartepunt z_{k} van het blok ligt $k/2\cdot a$ boven z_n. Voor z_k geldt dus:

$$z_k = na + n^2 b + \frac{N - n}{2} a = \frac{N + n}{2} a + n^2 b$$

Het zwaartepunt $z_{\text{CM},n}$ van een hangende slinky met n windingen.
Aangezien z_n de lengte is van deze hangende slinky en na zijn niet-uitgerekte lengte, kunnen we L vervangen door z_n en L_0 door na. Voor het zwaartepunt van deze kortere slinky geldt dus:

$$z_{\text{CM},n} = \frac{2z_n + na}{6} = \frac{3na + 2n^2 b}{6}$$

Voor het zwaartepunt z_{CM} van de **complete vallende slinky** met N windingen geldt dus:

$N\cdot m\cdot z_{\text{CM}} = (N - n)\cdot m\cdot z_k + n\cdot m\cdot z_{\text{CM},n}$

Dit leidt tot deze formules:

$$z_{\text{CM}} = \frac{Na}{2} + \frac{\left(3Nn^2 - 2n^3\right)b}{3N} = \frac{L_0}{2} + \left(L - L_0\right)\left(\frac{n^2}{N^2} - \frac{2n^3}{3N^3}\right)$$

$y = L - z_t$ met $z_{\text{t}} = z_n + \left(N - n\right)\dfrac{L_0}{N}$

Hieruit volgt: $y = L - L_0 - \dfrac{L - L_0}{N^2} n^2$ en $\dfrac{n^2}{N^2} = 1 - \dfrac{y}{L - L_0}$ dit pakket noem ik x

Verder is $z_{\text{CM}} = L - y_{\text{CM}}$ $\Rightarrow$ $z_{\text{CM}} = L - \frac{L_0}{2} + (L - L_0)\cdot\left(x - \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right) = 1{,}42 + 1{,}39\cdot\left(x - \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)$

Met deze formule kan bij een meting van y (de plaats van de top) de grafiek van z_{CM} geconstrueerd worden.
Bij de meting staat x in kolom 7 en de formule voor z_{CM} in kolom 8. De grafiek van z_{CM} blijkt een keurige parabool te zijn die bij een vrije val hoort. Dat is logisch, want er werken tijdens de val alleen **interne** krachten op de windingen.

Het zwaartepunt van winding n

Bij het berekenen van de arbeid $W_n = F_n\cdot \mathrm{d}z_{\text{cm}n}$ moeten we de waarde weten van de verplaatsing $\mathrm{d}z_{\text{cm}n}$ van het zwaartepunt van winding n.

Op tijdstip t geldt: $n\cdot m\cdot z_{\text{CM},n} = 1\cdot m\cdot z_{\text{cm}n} + (n-1)\cdot m\cdot z_{\text{CM},n-1}$

Hieruit volgt: $z_{\text{cm}n} = (\ 3a\cdot(2n - 1) + 2b\cdot(3n^2 - 3n+1)\ )/6$

Op tijdstip t + dt geldt: $z_{\text{cm}n} = z_{n-1} + a/2 = (n - 1)\cdot a + (n - 1)^2\cdot b + a/2$

$\mathrm{d}z_{\text{cm}n} = (3nb - 2b)/3$

```
'model voor vallende slinky 20-02-2012

k = k + 1
n = N - k

m1 = k*m
m2 = (k+1)*m

zn1 = n*a + n^2*b
zn2 = (n-1)*a + (n-1)^2*b
zt = N*a + n^2*b

y = L - zt
yCM = L - N*a/2 -(6*N*n^2-4*n^3)*b/(6*N)

zk1 = zn1 + k*a/2
zk2 = zn2 + (k+2)*a/2
dzk = zk1 - zk2
dy = dzk

zcmn1 = ( 3*a*(2*n-1) + 2*b*(3*n^2-3*n+1) )/6
zcmn2 = zn2 + a/2
dzcmn = zcmn1 - zcmn2

Fk = k*m*g
Fn = m*g
Fs = (2*n-1)/2*m*g

Wk = Fk*dy
Wn = Fn*dzcmn
Ws = Fs*dy

v1 = v1*k/(k+1)
Ek1 = 0.5*m2*v1^2
Ek2 = Ek1 + Wk + Wn + Ws

v2 = Sqrt(2*Ek2/m2)

vm = (v1 + v2)/2

dt = dy/vm
t = t + dt
v1 = v2

If k = N Then Stop EndIf
```

```
'startwaarden

N = 84            'aantal windingen

M = 0.252         'massa van de hele slinky
                  in kg
m = M/N           'massa van één winding
n = N             'aantal windingen dat nog in
                  rust is
k = 0             'aantal windingen dat
                  gevallen is

g = 9.4           'm/s^2 ; de waarde is die van
                  de fit bij de meting
L = 1.45          'lengte hangende slinky in
                  rust in m
L0 = 0.06         'lengte slinky op tafel in m
a = L0/N          'dikte van één winding
b = (L-L0)/N^2

t = 0             's
v1 = 0            'snelheid top in m/s

y = 0             'afstand die de top gevallen is
                  in m

yCM = 0.955       'zwaartepunt van de vallende
                  slinky
```

Gegevens slinky

datum van de meting: 23-02-2009

L = 1.450 m
L_0 = 0.060 m

M = 0.252 kg

$y_{\mathrm{cm,rust}}$ = 1.45 - 0.49 = 0.96 m

fit van CM: y = (4,71*t + 0,06)*t + 0,95

kolom 7: x = (1.39-[y top])/1.39

kolom 8:
y CM = 1.42-1.39*(x - (2/3)*sqrt(x^3))